

INDICE

Sez. B

- | | | |
|---|-------------|----------|
| 1. - COMUNICATO DELLA PRESIDENZA | | Pag. 879 |
| 2. - PRESENTAZIONE | Sitia | Pag. 881 |
| ARTICOLI | | |
| 3. - APPLICAZIONI DELL'ELABORATORE ALLA DIDATTICA
INTRODUZIONE ALL'INTERFACCIAMENTO
Borghi-De Ambrosis-Falomo-Massara | | Pag. 885 |
| 4. - LA CONTINUITÀ IN GEOMETRIA | Manara | Pag. 907 |
| 5. - UNA COSTRUZIONE ALTERNATIVA DEGLI INTERI
RELATIVI | Pisaneschi | Pag. 938 |
| 6. - FORMULE CARDANICHE PER LA RISOLUZIONE DELLE
EQUAZIONI DI TERZO E QUARTO GRADO | E.G. Airolì | Pag. 951 |
| 7. - LE SUPERFICIE $Z = F(X, Y)$ AL CALCOLATORE | Filotto | Pag. 962 |

L A C O N T I N U I T A '
I N G E O M E T R I A

Summary: This paper investigates the concept of "continuum" from the geometrical point of view in a historical frame. Some interesting conclusions are drawn concerning the didactical aspects of its teaching and use in the measure.

Prof. Carlo Felice Manara
Dipartimento di Matematica
Università di Milano

LA CONTINUITA' IN GEOMETRIA

Prof. Carlo Felice Manara
Dipartimento di Matematica
Università di Milano

SOMMARIO

I - Il concetto di "continuo" nella accezione comune del termine. Le analisi classiche ed i primi tentativi di razionalizzazione.

II - Il concetto di "continuo" in Geometria. Gli "Elementi" di Euclide e le lacune riguardanti la continuità.

III - Gli indivisibili e la nascita del calcolo infinitesimale.

IV - Gli enunciati moderni.

V - La rappresentazione del continuo geometrico e le costruzioni del campo reale.

VI - Grandezze continue e loro misure.

I - Il concetto di "continuo" nella accezione comune del termine. Le analisi classiche ed i primi tentativi di razionalizzazione.

I - E' appena necessario osservare che noi utilizziamo quotidianamente il vocabolo "continuo", ed altri vocaboli ad esso collegati, perché abbiamo bisogno di presentare certi concetti, che riteniamo bene espressi dai vocaboli in questione. Conseguenze di qui che la parola assume vari significati, non sempre molto coerenti tra loro; e ciò porta alla necessità della precisazione del termine stesso ed alla opportunità dell'analisi dei suoi vari possibili significati. Questo problema fu affrontato dai filosofi greci e fu trattato nei secoli da molti, matematici e filosofi, che volevano approfondire la valutazione della nostra conoscenza della natura materiale ed il significato della Matematica e della Geometria in particolare.

Per esempio, troviamo già in Aristotele una analisi del concetto di continuo che venne accettata in seguito anche dai fisici-matematici, fino alla seconda metà del secolo XVIII: la troviamo infatti accettata da Ruggero Boscovich nelle sue opere e nelle sue dissertazioni.

I punti fondamentali dell'analisi classica del continuo possono essere presentati succintamente come segue:

a) - Ciò che noi consideriamo come "il continuo" è essenzialmente distinto da ciò che consideriamo come "termine del continuo"; e qui il vocabolo "termine" ha il significato di "confine", "elemento iniziale o finale" e così via. Così per esempio il punto è termine della linea, la linea è termine della superficie e questa è termine del solido.

b) - Ciò che consideriamo come continuo è indefinitamente divisibile, ma i suoi termini, in quanto tali, sono indivisibili, e questo vale anche per le eventuali ulteriori suddivisioni. Così, per esempio, se consideriamo un segmento rettilineo, avente come estremi i punti A e B, ogni punto P interno al segmento lo divide in due segmenti. Ognuno di que-

sti è ancora divisibile, e così via, ma il punto P, in quanto termine di un segmento, è indivisibile; ancora, considerato un quadrato, i cui vertici siano i punti A, B, C, D, siano M ed N i punti medi dei due lati AB e CD, paralleli tra loro (Cfr. fig. 1); il segmento avente come estremi i punti M ed N, visto come lato del rettangolo ACMN, è indivisibile, in quanto termine di una superficie, anche se è possibile suddividerlo indefinitamente in altri segmenti mediante suoi punti; con linguaggio che fa appello all'intuizione si potrebbe dire che è indivisibile nel senso della lunghezza.

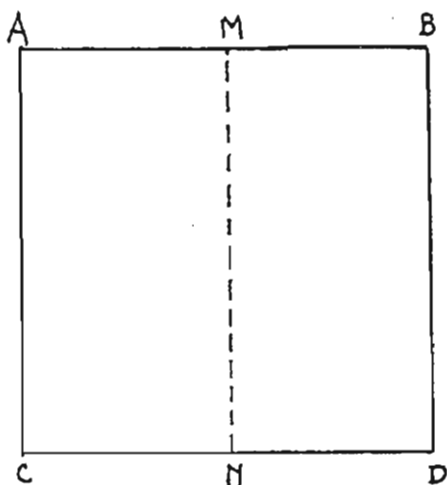


fig. 1

Ne consegue che ciò che consideriamo come il continuo è di natura diversa da quella dei suoi termini, e non si può dire "costituito" da questi. Così il segmento si può immaginare come generato dal moto continuo di un punto, e quindi come un insieme di punti; ma non lo si può considerare costituito da punti come una collana è costituita da perle infinite, che possono toccarsi senza coincidere.

c) - Quando si divide un continuo in due parti, l'elemento di divisione è unico, ed appartiene ad una sola di esse. In altre parole non si possono immaginare due termini che siano "a contatto" fra

loro senza confondersi in uno solo. Chiaramente, nel caso del quadrato ABCD considerato sopra, occorre distinguere tra la superficie del rettangolo ACMN, immaginata descritta dal moto continuo di un segmento, e la costruzione dei due rettangoli ACMN, MNBD.

Quanto è stato detto a proposito dell'appartenenza del termine ad una sola delle parti indica chiaramente che l'analisi del continuo va fatta in un certo ordine di idee, che supera gli aspetti intuitivi, legati alle utilizzazioni quotidiane del concetto, richiamato all'inizio. In questo ordine di idee, osserviamo che l'enunciato di continuità della retta, formulato da J.R.Dedekind nella seconda metà del XIX secolo, precisa una circostanza analoga a quella che abbiamo richiamato. Infatti tale enunciato potrebbe essere dato nella forma seguente:

«Si stabilisca sulla retta un ordinamento totale; si dividano tutti i punti della retta in due classi, che chiameremo H e K, in modo tale che ogni elemento della classe H preceda (nell'ordinamento stabilito) ogni elemento della classe K. Allora esiste un unico punto P il quale, sempre nell'ordinamento stabilito, è l'ultimo della classe H o il primo della classe K. Nel primo caso la classe K non ha primo elemento, nel secondo caso la classe H non ha ultimo elemento».

2 - L'analisi classica del continuo non si limitava alle proposizioni che abbiamo ricordato, ma aggiungeva spesso una osservazione che, come spesso è accaduto, veniva considerata come evidente in sé, e da molti studiosi è stata considerata come espriamente la proprietà fondamentale di ogni grandezza continua, e quindi non soltanto del continuo geometrico.

Tale osservazione potrebbe essere presentata nel linguaggio moderno nel modo seguente:

«Siano A e B due grandezze, appartenenti ad una medesima classe di grandezze omogenee; si supponga, come è sempre lecito fare, che si abbia:

$$A < B \quad (1).$$

Si consideri una grandezza X che varia con continuità, passando da A a B . Allora tale grandezza viene a coincidere, nella sua variazione, con ogni grandezza compresa tra A e B .

Occorre osservare che questa proposizione non risolve il problema che consiste nell'accertare la esistenza di una grandezza che soddisfa a certe richieste.

Si consideri, a titolo di esempio, una argomentazione del tipo della seguente:

Sia AB il lato di un quadrato, e si consideri sulla retta AB il punto B' , tale che si abbia (cfr. fig.2):

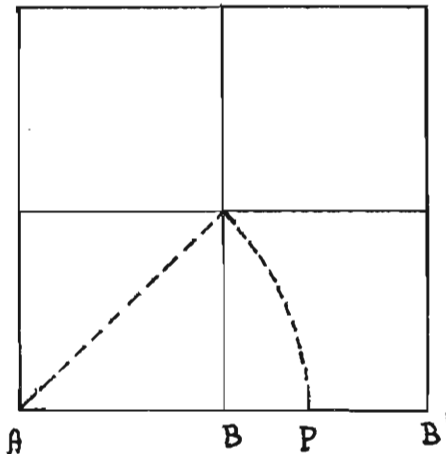


fig. 2

$$AB' = 2 AB \quad (2).$$

Si consideri il quadrato che ha come lato AB' ; si vede dalla figura che tale quadrato ha area quadrupla di quella del quadrato che ha come lato AB .

Si consideri ora un punto P che descrive il segmento BB' , e si immagini di costruire ogni quadrato avente come lato il segmento AP , in

corrispondenza alle varie posizioni di P . Quando P coincide con B l'area è quella del quadrato di lato AB , quando P coincide con B' l'area del quadrato è il quadruplo di quella del quadrato precedente. Ora P prende tutte le posizioni intermedie tra B e B' ; quindi esisterà una posizione di P in corrispondenza alla quale il quadrato che si costruisce ha la sua area che è doppia di quella del quadrato costruito su AB . Il segmento AP corrispondente è uguale alla diagonale del quadrato di lato AB , e si può quindi costruire con il compasso, facendo centro in A e riportando sulla retta AB la diagonale fino a costruire il punto P .

Ma la questione fondamentale è appunto quella di decidere se il punto P , che così si crede di costruire, esista sulla retta AB : perché potrebbe darsi che su tale retta esista una lacuna, che noi non vediamo, proprio in corrispondenza al punto P che si vuole costruire.

Ovviamente la costruzione suggerita ha forse un significato suggestivo, ma non ha valore probatorio, almeno fino a quando non si è stabilita l'esistenza del punto di intersezione della retta AB e della circonferenza che ha A come centro ed ha come raggio la diagonale del quadrato di lato AB .

E tale esistenza può per esempio essere postulata, cioè affermata senza dimostrazione, oppure può essere dimostrata sulla base di altre proposizioni enunciate validamente (cioè postulate o dimostrate) in precedenza. Ma il disegno non è sufficiente per garantire la esistenza degli enti che si disegnano. Infatti già Platone aveva osservato che gli oggetti di cui si occupa il matematico non sono le figure, ma i concetti; perché soltanto tra i concetti si possono stabilire quelle relazioni necessarie che sono "lette" dalla nostra mente e non solamente percepite dai nostri sensi.

Nel caso in esame, questa analisi è resa necessaria dalla esistenza di controesempi, i quali ci confermano nella nostra opinione, sulla necessità della utilizzazione della ragione, e della opportunità della diffidenza a proposito delle percezioni sen-

soriali e dell'immaginazione che le elabora. Infatti si dimostra che sulla retta AB i punti P tali che il segmento AP sia commensurabile con AB formano un insieme denso. Ma in tale insieme non è incluso il punto che corrisponde alla diagonale del quadrato di lato AB ; pertanto solo il ragionamento ci permette di superare le sensazioni e l'immaginazione.

II - Il concetto di "continuo" in Geometria. Gli "Elementi" di Euclide e le lacune riguardanti la continuità.

1. - Ciò che è stato detto finora sul concetto di "continuo" può essere applicato in un contesto molto ampio: per esempio nell'ambito della durata temporale, che noi percepiamo come continua, ed a proposito di una qualunque classe di grandezze percepite come continue. Tuttavia è abbastanza naturale che le questioni riguardanti il continuo abbiano avuto la loro origine prevalentemente nella problematica della Geometria, nata dalle nostre esperienze sugli oggetti che ci circondano e dalla elaborazione che la fantasia opera su di esse. E ciò è confermato anche dalle trattazioni del Capitolo precedente.

In questo campo è praticamente obbligatorio prendere le mosse dall'analisi del pensiero matematico dei Greci, come ci è stato trasmesso e consegnato nell'immortale trattato degli "Elementi" di Euclide; infatti si può tranquillamente asserire che i Greci in epoca antica coltivarono la Matematica ad un livello che non ha confronto con quello a cui giunsero gli altri popoli, almeno stando ai documenti che ci sono pervenuti finora. Infatti soltanto presso i Greci troviamo le teorie presentate ed i problemi risolti ad un livello astratto e generale, cioè ad un livello propriamente scientifico: presso altri popoli incontriamo invece soltanto dei problemi singoli, risolti episodicamente, certo in modo molto ingegnoso, ma che non costituiscono testimonianza dell'esistenza di teorie scientifiche

degne di questo nome.

Come è noto, la esposizione di Euclide procede in modo strettamente logico, enunciando definizioni e postulati, e deducendone rigorosamente le conseguenze. Tuttavia già nella prima proposizione del Libro I, laddove Euclide risolve il problema di costruire un triangolo equilatero, si incontra un punto in cui la critica posteriore ha messo in evidenza quella che alla nostra mentalità si presenta come una falla.

Infatti, secondo la procedura euclidea, la costruzione di un triangolo cosiffatto avente un segmento AB come lato viene eseguita intersecando la circonferenza che ha centro in A e raggio AB con quella che ha lo stesso raggio ed ha B come centro.

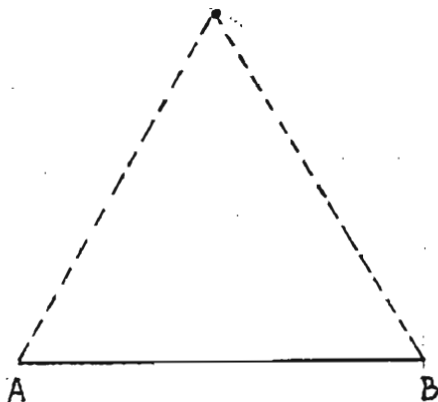


fig. 3

Ora è stato osservato che la esistenza dei punti di intersezione di due circonferenze cosiffatte non si può dedurre dai postulati enunciati in precedenza. Così come non si può dimostrare in generale che esistano i punti di intersezione tra una circonferenza ed una retta che ha almeno un punto interno alla circonferenza.

E' chiaro che non sarebbe completamente equo invalidare la trattazione euclidea nel suo complesso per la presenza di questo neo e di altri che verranno discussi in seguito; è utile piuttosto riflettere sulla mentalità che era alla base della

Matematica dei Greci. Invero questi non parlano di enti dei quali non si conosca la costruzione; e viceversa la esistenza degli enti di cui si parla viene in ogni caso accettata sulla base di una effettiva costruzione; e molto spesso il disegno viene visto come la convalida della esistenza dell'ente di cui si tratta.

Addirittura questa esistenza conquistata con il disegno conduceva Platone ad asserire la superiorità della Geometria sull'Aritmetica: invero per esempio nel caso considerato in precedenza, riguardante la costruzione del quadrato di area doppia del quadrato di lato AB , il segmento AP in questo caso è incommensurabile con AB : ciò significa che il rapporto tra AP e AB non è esprimibile con il rapporto tra due numeri interi. Se quindi esso fosse esprimibile con un numero, questo sarebbe uno di quei numeri che i Greci chiamarono (nella loro lingua) inesprimibili.

Come è noto il termine greco che ha questo significato ne ha anche altri, e ciò ha forse condotto i traduttori a chiamare "irrazionali" questi numeri che esprimono il rapporto tra due grandezze incommensurabili; traduzione che può ingenerare in qualche profano la convinzione che la Matematica prenda in considerazione anche degli oggetti che sfuggono alla ragione oppure, peggio, sono contrari a questa, mentre si tratta soltanto di rapporti che non sono dominabili con un'unica coppia di numeri (cioè con un unico numero razionale), mentre invece, come osservava Platone, sono perfettamente rappresentabili con una coppia di segmenti, come mostra una qualunque figura.

Nel caso delle proposizioni geometriche di cui stiamo parlando, è noto che la esistenza dei punti in questione può essere dimostrata in seguito all'enunciazione di un postulato di continuità, per esempio del tipo di quello che abbiamo presentato nel Capitolo I, nella forma che gli è stata data da Dedekind. Questo postulato permetterebbe di ovviare agli inconvenienti che insorgono dalla procedura euclidea in questo ed in altri casi. Va ricordato

tuttavia che, allo scopo di colmare le lacune della trattazione euclidea, per quanto riguarda la esistenza di intersezioni di rette con circonferenze o di circonferenze tra loro, qualche Autore ha proposto di enunciare un apposito postulato, più ristretto di quello di continuità della retta, e per il quale è stato proposto il nome di "Postulato del compasso".

2 - E' stata messa in evidenza nella trattazione euclidea un'altra lacuna importante che è stata oggetto di discussioni; essa è uno di quei "nei" dei quali Girolamo Saccheri ha voluto liberare la trattazione euclidea nella sua celebre opera, che viene quasi sempre ricordata soltanto per il tentativo di dimostrazione del postulato della parallela. Si tratta della proposizione 18 del Libro V, che riguarda una proprietà delle proporzioni tra grandezze; l'importanza della discussione su questo tema è data, a nostro parere, soprattutto dal fatto che in questo caso si discute della continuità non soltanto in relazione ad un determinato problema geometrico, ma in generale in relazione al concetto di grandezza.

Per maggiore chiarezza, esporremo la dimostrazione euclidea con linguaggio moderno. Sia da dimostrare che, date quattro grandezze a, b, c, d , se vale la proporzione:

$$(1) \quad a : b = c : d ,$$

allora vale anche la proporzione:

$$(2) \quad (a+b) : b = (c+d) : d .$$

Il ragionamento che si trova in Euclide è il seguente: se non fosse valida la (2), esisterà una grandezza, diversa da d , che è quarta proportionale dopo $(a+b), b$ e $(c+d)$. Supponiamo che essa sia maggiore di d , ed indichiamola con $d+x$. Si avrà quindi:

$$(3) \quad (a+b) : b = (c+d) : (d+x) .$$

Di qui applicando la proprietà detta del "separando" (già dimostrata) segue:

$$(4) \quad a : b = (c-x) : (d+x) ,$$

e quindi per confronto con la (1), si avrà:

$$(5) \quad c : d = (c-x) : (d+x).$$

Ma questa relazione non può sussistere, come è già stato dimostrato, perchè ovviamente $(c-x)$ è minore di c e $(d+x)$ è maggiore di d .

Analoghe considerazioni si svolgono nel caso in cui la grandezza quarta proporzionale sia minore di d . Come si vede, uno dei punti fondamentali della dimostrazione consiste nella considerazione della esistenza di una grandezza che è quarta proporzionale dopo tre date. Ciò non è stato né postulato, né dimostrato in precedenza. Tale grandezza è stata costruita in casi particolari, per esempio sulla scorta del teorema di Talete nel caso in cui le proporzioni considerate sussistano tra segmenti; ma la sua esistenza rimane non provata nel caso in cui si tratti di grandezze nel senso più generale del termine.

3 - Si può vedere facilmente che si cade in difficoltà analoghe quando si desidera definire in modo rigoroso il sottomultiplo di una grandezza qualunque secondo un intero naturale n : infatti si può eseguire la costruzione di un sottomultiplo cosifatto in alcuni casi, per esempio quando le grandezze considerate siano dei segmenti, applicando anche in questo caso il teorema di Talete. Ma la costruzione di un sottomultiplo in generale presenta delle difficoltà che sono diverse da una all'altra classe di grandezze che si considerano. Come è noto, la costruzione della teoria della proporzionalità tra grandezze viene fatta in Euclide fondandosi esclusivamente sul concetto di multiplo di una grandezza, senza far ricorso al concetto di sottomultiplo. Questa finezza critica viene considerata dagli storici come una prova della grande profondità alla quale era giunto il pensiero matematico di Euclide, oppure quello delle generazioni dei matematici che lo precedettero, se si deve accettare la tesi secondo la quale l'opera di Euclide è in parte una compilazione dei risultati di una civiltà scientifica precedente.

III - Gli indivisibili e la nascita del calcolo infinitesimale.

1 - E' noto che le questioni riguardanti il concetto di continuo, specialmente in Geometria, ritornano alla ribalta nei secoli attorno al XVII, in particolare con il pensiero di Bonaventura Cavalieri, da lui espresso nella celebre opera che ha come titolo "Geometria indivisibilibus" (titolo che si potrebbe tradurre "La Geometria fatta con gli indivisibili"). Il pensiero di Cavalieri non si presenta in un'unica versione: inoltre accanto alle intuizioni, che fanno del Cavalieri un precursore del calcolo infinitesimale, e che preludono alla idea di integrale di una funzione, si trovano dei tentativi di giustificazione filosofica non sempre riusciti. Oggi alcuni dei suoi risultati sono giustificati in modo rigoroso con i metodi dell'Analisi matematica moderna; invece si potrebbe dire che i tentativi di giustificazione dati dal Cavalieri stesso e da altri hanno fatto rinascere alcune questioni che già erano state risolte in modo chiaro dal pensiero greco, secondo il quale, come abbiamo già detto, il continuo era considerato come di natura essenzialmente diversa dai suoi termini, e non poteva essere visto come costituito da elementi analoghi a questi: così per esempio, come abbiamo già detto, non si poteva pensare alla linea costituita da punti, immaginati come perle infilate che formano una collana. Si manifesta ancora una volta quella tensione dialettica tra immaginazione e ragione di cui abbiamo già detto: infatti non si riusciva a giustificare in modo soddisfacente quei procedimenti di calcolo suggeriti dalla immaginazione, e che portavano a risultati validi quando erano applicati correttamente.

E d'altra parte spesso tali procedimenti conducevano a risultati errati quando erano applicati in modo disinvolto e forse poco fortunato.

La scoperta dei libri del "Metodo" di Archimede ha permesso di accertare che anche quel Grande

utilizzava dei procedimenti che oggi vengono detti euristici, perchè suggeriscono la strada per giungere a risultati validi; ma che si curava di giustificare i risultati stessi con ragionamenti rigorosi. Un atteggiamento analogo si incontra presso B. Pascal, il quale, nel suo trattato sulla cicloidale, si premura di avvertire che egli utilizza il linguaggio degli indivisibili come un comodo strumento di comunicazione, ma che si possono ogni volta giustificare i risultati ottenuti con procedimenti rigorosi classici.

Non è qui il luogo per presentare tutti gli sviluppi della disputa sugli indivisibili, che ebbe luogo nei secoli ricordati, e di cui si trovano ancora tracce negli Autori del secolo XVIII. Si potrebbe seguire, in questo campo, il pensiero di F. Enriques, il quale asseriva che, anche quando tali procedimenti erano erronei, pure gli errori commessi furono stimolanti per il progresso del pensiero matematico; si potrebbe dire infatti che quelle intuizioni, fondate sulla immaginazione del continuo, ed in particolare del continuo geometrico, stanno alla base del calcolo infinitesimale di oggi. Ma non intendiamo soffermarci su problemi storici: ci limitiamo a ricordare, tra gli errori più interessanti, quello commesso da Girolamo Saccheri, il quale credette di aver dimostrato il postulato euclideo delle parallele proprio in base a certi ragionamenti basati sull'impiego errato degli indivisibili; a sua scusa va detto tuttavia che egli, dopo la presunta dimostrazione, aggiunge che la conclusione a cui è giunto non gli appare del tutto chiara e scevra di dubbi.

IV . *Gli enunciati moderni.*

1 - Da quanto abbiamo detto poco sopra, potremmo dedurre che in una trattazione, anche scolastica, della Geometria e dei suoi fondamenti, che voglia essere rigorosa, non si può fare a meno di enunciare una proposizione che esprima, in termini precisi, quelle proprietà del continuo geometrico

che ci sono presentate dalla immaginazione, la quale elabora le nostre sensazioni e ne costruisce delle estrapolazioni; queste debbono poi essere tradotte in concetti, i quali a loro volta debbono essere espressi e presentati in forma linguistica o simbolica precisa.

Ci occuperemo in seguito della presentazione simbolica del continuo, presentazione che conduce sostanzialmente alla costruzione dell'insieme dei numeri reali. Qui ci limitiamo per ora a prendere in considerazione i vari enunciati con i quali la trattatistica odierna presenta il concetto di continuo.

A questo fine osserviamo anzitutto che, per i fini della Geometria, basterebbe dare un enunciato di continuità della retta, per poter poi estendere il concetto di continuità agli altri enti che sono oggetto di studio. Tuttavia non mancano esempi di impostazioni diverse, per esempio quella scelta da D.Hilbert nel suo trattato intitolato "Fondamenti di Geometria", sulla quale ritorneremo in seguito. Qui ci limitiamo a ricordare gli enunciati del postulato di continuità che compaiono nella trattatistica abituale.

Uno di questi enunciati è quello che abbiamo già presentato nel Capitolo I, e che è dovuto al Dedekind. Rimandiamo il lettore al capitolo citato, e ci limitiamo a ricordare qui che per poter enunciare il postulato nella forma citata occorre ovviamente che sulla retta sia stato introdotto rigorosamente un ordinamento totale.

Un'altra forma in cui viene presentato il postulato di continuità viene abitualmente attribuita a G. Cantor; noi daremo qui l'enunciato con riferimento alle successioni di intervalli della retta. Esso potrebbe essere presentato nel modo seguente:

«Si consideri sulla retta una successione infinita di intervalli, i cui estremi indicheremo con $A(n)$ e $B(n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Si supponga inoltre che ogni intervallo sia contenuto in tutti quelli che lo precedono nella successione. Allora esiste almeno un punto della retta che è contenuto in tutti gli

intervalli».

Se poi si fa l'ipotesi ulteriore che la lunghezza degli intervalli tenda a zero, si dimostra che il punto comune a tutti, di cui parla l'enunciato, è unico.

Ovviamente per poter enunciare il postulato nella forma di Cantor occorre che si sia dato senso al concetto di successione infinita ed al concetto di intervallo della retta. Inoltre, se si vuole dimostrare la unicità del punto comune a tutti, occorre che si possa dare senso al confronto della lunghezza di un intervallo con quella di un intervallo qualunque arbitrario.

Si può dimostrare che i due enunciati che abbiamo dato non sono equivalenti. A tal fine ricordiamo qui la proposizione che viene detta "di Archimede" (ma che già si trova in Euclide); essa viene enunciata di solito con riferimento a grandezze qualsiasi; noi tuttavia la enunceremo qui in relazione ai segmenti, nella forma seguente:

«Dati che siano due segmenti a e b , supponendo che si abbia:

$$a < b,$$

esiste almeno un numero naturale n tale che sia:

$$n \cdot a > b \text{ »}.$$

(Qui e nel seguito l'asterisco "*" indica l'operazione di moltiplicazione).

Ora si può dimostrare che, quando si sia adottato l'enunciato della continuità secondo Dedekind, la proposizione detta "di Archimede" può essere dimostrata come teorema. Invece, quando si adotti la formulazione di continuità data da Cantor, la proposizione di Archimede non può essere dimostrata, almeno nella abituale strutturazione dei corsi, e quindi deve essere presentata come un postulato.

In altro modo si potrebbe dire che, quando si sia adottata la formulazione di Dedekind, allora la proposizione di Archimede e la proposizione di Cantor possono essere dimostrate. Invece se si adotta la formulazione di Cantor, per poter dimostrare la proposizione di Dedekind occorre

enunciare anche la proposizione di Archimede come postulato.

2 - La proprietà di continuità geometrica viene presentata da D.Hilbert in modo diverso da quelli che abbiamo presentato poco fa. Per poter comprendere questa presentazione ritorniamo per un momento a ciò che abbiamo detto sopra, nel Capitolo I, quando abbiamo parlato del lato del quadrato che abbia area doppia di quella del quadrato costruito su un segmento AB. Ivi abbiamo detto che, riportando sulla retta che contiene A e B, a partire da A, la diagonale del quadrato in parola, si otterrebbe un punto P tale che il segmento AP risolverebbe il problema, se tale punto P esistesse. Si può osservare che i postulati di continuità mirano appunto a garantire l'esistenza del punto stesso, esistenza che, nella mentalità dei Greci, era ammessa senza alcun dubbio in base all'esame del disegno.

Guardando alle cose da un altro punto di vista, si potrebbe dire che, qualora il punto P non esistesse, si potrebbe ampliare la classe dei punti della retta, includendo in essa anche il punto P; ed i postulati di continuità realizzano appunto un ampliamento della classe dei punti della retta, ampliamento che permette di parlare del punto P e del segmento AP.

In questo ordine di idee si pone il postulato enunciato da Hilbert; questo Autore infatti, dopo aver enunciato vari altri postulati, che egli ordina in 4 gruppi, enuncia una proposizione la quale afferma che la classe degli enti, chiamati punti, che soddisfano ai postulati enunciati in precedenza, è la più ampia possibile. In tal modo quindi sarebbe inutile enunciare un postulato di continuità, in una delle forme presentate più sopra; questo infatti porterebbe ad un ampliamento della classe dei punti, ma tale ampliamento non è più necessario perché la classe dei punti è già stata presentata come la più ampia possibile classe di enti che soddisfino a tutti i postulati precedenti.

V - La rappresentazione del continuo e la costruzione del campo reale.

1 - I vari enunciati dei postulati di continuità che abbiamo presentato finora permettono di costruire una Geometria rigorosa; cioè una dottrina nella quale le dimostrazioni siano sempre fatte in ogni caso con riferimento a proposizioni accertate in precedenza, e mai con appello ad una "evidenza" oppure ad una "intuizione" che possono essere contestate.

Si potrebbe osservare tuttavia che questi enunciati sono espressi con il linguaggio comune, e si riferiscono a quell'insieme di esperienze sugli oggetti che ci circondano che stanno alla base della costruzione della Geometria.

Si pone quindi il problema di costruire un insieme di simboli, da chiamarsi numeri, che abbiano alcune delle proprietà degli enti da noi già chiamati numeri, e che permettano di rappresentare il continuo in forma simbolica; la rappresentazione che così si vuole ottenere dovrebbe permettere non soltanto la rappresentazione del continuo, ma anche dovrebbe ammettere certe operazioni che riproducono, almeno in parte, i risultati delle manipolazioni che noi eseguiamo sulla realtà che ci circonda.

Più precisamente, la rappresentazione della realtà viene abitualmente conseguita con una operazione che viene chiamata "misura"; con essa, mediante opportune convenzioni e con adeguate operazioni materiali, ogni grandezza viene rappresentata da un simbolo numerico. Inoltre le operazioni sui simboli numerici riproducono i risultati delle operazioni da noi eseguite sugli enti della realtà; per esempio, la somma di due segmenti, eseguita riportando i segmenti stessi sulla medesima retta in modo che abbiano in comune un estremo, ha come misura il numero che si ottiene operando la somma dei numeri che forniscono la misura dei due segmenti.

Vedremo subito come si possa costruire un insieme di simboli che rispondono a questi requisiti;

osserviamo tuttavia, in linea preliminare, che tali simboli dovranno comprendere anche quei numeri che vengono chiamati "irrazionali" (dei quali abbiamo già detto) e che non sono esprimibili con un unico rapporto di due numeri interi. Pertanto la costruzione di un campo di numeri che comprenda anche questi dovrà condurre necessariamente a prendere in considerazione delle classi infinite di concetti e di oggetti mentali, e ad affrontare le difficoltà concettuali che vi si ricollegano.

2 - Il campo reale può essere costruito percorrendo vari itinerari concettuali, ad ognuno dei quali potrebbe corrispondere un adeguato itinerario didattico, che l'insegnante potrà seguire per introdurre un concetto fondamentale per tutta la Matematica, pura ed applicata.

Come per gli altri capitoli della Matematica, il gusto, la cultura e la formazione mentale dell'insegnante sono spesso determinanti per la scelta della strada che egli decide di seguire; inoltre non ultima circostanza determinante è costituita dalla possibilità di disporre di un testo chiaro e rigoroso, che non imponga all'insegnante la dettatura di appunti di sua soddisfazione.

Alcuni itinerari che si potrebbero seguire passano per le tappe seguenti:

0 - NUMERI NATURALI

:

2 - NUMERI RAZIONALI

4 - NUMERI REALI ASSOLUTI

1 - ANELLO DEGLI INTERI
(RELATIVI)

3 - CAMPO DEI NUMERI
RAZIONALI

5 - CAMPO DEI NUMERI
REALI

L'itinerario che viene seguito più spesso nella trattatistica recente è quello che, partendo dall'insieme dei naturali, segue la colonna di destra, cioè degli argomenti contrassegnati con

numeri dispari (1,3,5); questa scelta viene forse fatta con lo scopo di presentare agli studenti certe strutture algebriche (gruppo, gruppo abeliano, anello, campo) la cui conoscenza viene considerata come indispensabile. Tuttavia non si tratta affatto di un itinerario logicamente obbligatorio: è possibile infatti percorrere l'itinerario che segue la colonna di sinistra, cioè l'itinerario degli argomenti contrassegnati con i numeri pari (2,4) e che sfocia soltanto alla fine nell'argomento 5, cioè nella costruzione del campo reale. E' chiaro inoltre che sono possibili altri itinerari, per esempio quello degli argomenti contrassegnati con i numeri 2, 3,5.

A nostro parere, l'itinerario corrispondente alla colonna di sinistra può essere percorso rimanendo aderenti ai contenuti della Matematica elementare e delle esperienze quotidiane: infatti i numeri razionali assoluti formano oggetto di insegnamento anche nelle scuole dell'ordine elementare (le frazioni) e permettono di dominare tutto un insieme di esperienze quotidiane che si riferiscono alle grandezze abitualmente manipolate dai discenti: aree, lunghezze in senso assoluto, volumi, capacità, pesi, ecc..; in una parola tutto l'insieme di enti che vengono presi in considerazione quando si insegna il sistema metrico decimale e il suo impiego. Pertanto, in questo ordine di idee, il passaggio dai razionali assoluti ai reali assoluti può essere fatto con relativa facilità, e quando si sia costruito l'insieme dei reali assoluti, la costruzione del campo reale può essere ottenuta con una delle solite procedure elementari che conducono ad introdurre i numeri con segno (i numeri relativi) e le operazioni corrispondenti.

Daremo qui di seguito un succinto esempio di introduzione dei reali assoluti, seguendo il pensiero di G. Peano: in questo ordine di idee si cerca di giungere nel modo più diretto possibile, senza introdurre delle nozioni estranee, e senza estendere troppo l'ambito delle strutture che si

presentano. A nostro parere, questo aspetto della questione dovrebbe essere tenuto presente perché già l'introduzione del concetto di numero reale richiede uno sforzo mentale non indifferente, dovuto al fatto che (come è già stato detto) occorre operare su classi di infiniti elementi, ognuna delle quali viene considerata com un unico oggetto di pensiero. Ripetiamo tuttavia che non esistono itinerari obbligati; quindi l'insegnante potrà scegliere quello che egli ritiene più opportuno, a seconda della preparazione che vuole conferire agli alunni e del loro livello mentale.

3 - D'ora innanzi, e fino ad esplicito avviso contrario, con il termine "numero" indicheremo un numero razionale assoluto (compreso lo 0). Tutte le proprietà di questi numeri, delle relazioni tra essi e delle operazioni su di essi sono considerate note. Quando vi sarà bisogno, i singoli numeri verranno indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino:

(1) $a, b, c, d, \dots, x, y, z, \dots$

Sia A una classe di numeri; diremo che la classe A è superiormente limitata se esiste almeno un numero che è maggiore di ogni numero della classe A . Scriveremo anche " A è SL" per indicare che A è superiormente limitata.

Data una classe A che è SL, diremo che essa è "completa" se A contiene ogni numero non superiore ad un suo numero a . In altre parole, una classe A che è SL, viene detta completa se, insieme ad un numero a contiene anche tutti quelli minori di a . Ovviamente, quando sia data una classe A che è SL, se essa non è completa esiste una seconda classe ben determinata che contiene tutti gli elementi di A ed è completa; tale classe si ottiene aggregando ad A tutti i numeri che sono minori di qualche numero di A .

D'ora innanzi tutte le classi SL che prenderemo in considerazione saranno supposte complete; esiste un'unica classe SL e completa formata da un unico elemento: è quella costituita dallo 0.

Consideriamo ora una classe A SL e completa; può avvenire che esista un numero (ovviamente razionale) a che possiede le due proprietà seguenti:

I) nessun numero di A è maggiore di a ;

II) considerato un numero qualunque y , minore di a , esso è minore di qualche numero della classe A .

Un numero a che possiede queste due proprietà verrà chiamato "estremo superiore di A " e scriveremo:

$$(2) \quad a = \sup(A).$$

Se nella classe A esiste un numero massimo esso è anche estremo superiore di A . Se A possiede un estremo superiore converremo di aggregarlo alla classe A ; pertanto d'ora innanzi diremo completa una classe che contiene tutti i numeri minori di un suo numero qualunque, e contiene anche il suo estremo superiore, qualora esso esista. L'operazione che, a partire da una data classe A che è SL conduce a costruire la classe completa da essa determinata, eventualmente aggregando anche l'estremo superiore quando esso esista, verrà spesso chiamata "completamento" della classe A . Le classi SL che posseggono un estremo superiore e quindi anche un massimo, in forza della convenzione enunciata, saranno dette "speciali".

Osservazione 1 - Esistono delle classi SL non speciali.

Tale è per esempio la classe dei numeri (razionali) x che soddisfano alla condizione:

$$(3) \quad x^2 < 5$$

La dimostrazione di questa proposizione si trova nella NOTA I alla fine di queste pagine.

Osservazione 2 - Le classi SL speciali sono in corrispondenza biunivoca con i razionali. Infatti ad ogni razionale x possiamo associare la classe SL costituita da tutti i razionali che non sono maggiori di x ; e viceversa, data una classe SL speciale, essa, per definizione, possiede un massimo che possiamo associare univocamente alla

classe.

4 - Date due classi SL e complete A e B, indicheremo con il simbolo:

$$(1) \quad A + B$$

la classe che si ottiene sommando ogni numero di A con ogni numero di B, ed eventualmente completando la classe così ottenuta; si dimostra che questa è pure SL, e che per l'operazione indicata simbolicamente dalla (1) valgono le proprietà formali espresse nelle formule seguenti:

$$(2) \quad A+B = B+A \text{ (proprietà commutativa);}$$

$$(3) \quad A+(B+C) = (A+B)+C \text{ (proprietà associativa).}$$

Analogamente, nelle ipotesi ammesse, indicheremo con il simbolo,

$$(4) \quad A*B$$

la classe ottenuta moltiplicando ogni elemento della classe A per ogni elemento della classe B, ed eventualmente completando la classe così ottenuta. Si dimostra che la classe che si ottiene è SL, e che per l'operazione ora definita valgono le seguenti proprietà formali:

$$(5) \quad A*B = B*A \text{ (proprietà commutativa)}$$

$$(6) \quad A*(B*C) = (A*B)*C \text{ (proprietà associativa)}$$

Si verifica inoltre che per le operazioni ora definite vale anche la proprietà formale:

$$(7) \quad A*(B+C) = A*B+A*C \text{ (proprietà distributiva)}$$

Siano ora A e B due classi SL complete. Scriveremo:

$$(8) \quad A > B$$

per indicare che esiste in A almeno un elemento che è maggiore di ogni elemento di B.

Si verifica che per la relazione tra classi SL ora definita valgono le proprietà seguenti:

$$(9) \quad \text{se è } A > B \text{ ed è anche } B > C, \text{ allora è } A > C \text{ (proprietà transitiva).}$$

Date due classi SL complete, A e B, tra esse vale sempre una ed una sola delle relazioni seguenti:

$$(10) \quad A > B \text{ oppure } B > A \text{ oppure } A = B \text{ (proprietà di tricotomia).}$$

Invece di scrivere la (8), scriveremo anche:

$$(11) \quad B < A$$

considerando la scrittura (11) perfettamente

equivalente alla (8).

5 - Sia A una classe SL e completa. Indicheremo con il simbolo:

(1) A^c
leggendo "complementare di A", la classe costituita da tutti i razionali, ognuno dei quali è maggiore di tutti gli elementi di A. Diremo che la classe A^c è completa se, quando contiene un razionale x , contiene anche tutti i razionali maggiori di x . D'ora innanzi, quando parleremo di classe complementare di una classe data supporremo sempre che essa sia completa.

Ovviamente la classe 0^c è costituita da tutti i razionali diversi dallo zero.

Diremo che un numero razionale x è l'estremo inferiore di una classe A^c se esso possiede le due seguenti proprietà:

I) esso non è maggiore di alcun elemento di A^c ,
II) ogni numero razionale maggiore di x è maggiore di qualche elemento di A^c .

Ovviamente se A è una classe speciale, essa è completa, e quindi ammette un numero massimo a ; questo stesso numero è l'estremo inferiore della classe A^c . Tuttavia esistono delle classi che non hanno estremo superiore e tali che la loro classe complementare non ha estremo inferiore. Tale è, per esempio, la classe dei razionali z tali che sia:

$$z^2 > 5.$$

La dimostrazione di questo fatto sarà data nella NOTA II, alla fine. Siano ora due classi SL e complete A e B, e supponiamo che sia:

(2) $A > B$;

indicheremo con il simbolo:

(3) $A - B$

la classe SL che si ottiene sottraendo da ogni elemento di A ogni elemento di B, quando ciò sia possibile, e completando la classe così ottenuta. Si verifica che la classe che così si ottiene è SL ed inoltre che, sempre nella ipotesi (3), si ha:

(4) $B + (A - B) = A$,

ed in particolare che è

$$(5) \quad A - A = 0 ; A - 0 = A . .$$

Siano ora A e B due classi, e si suponga che B sia diversa dalla classe 0. Indicheremo con il simbolo:

$$(6) \quad A/B \text{ oppure } A:B$$

o con altri simboli abituali la classe che si ottiene dividendo ogni razionale della classe A per ogni razionale della classe Bc, e completando la classe così ottenuta.

Si verifica che la classe che così si ottiene è SL e che inoltre, nella ipotesi ammessa, si ha:

$$(7) \quad B * (A/B) = A .$$

L'operazione che conduce, nella ipotesi (2), alla costruzione della classe (3) viene chiamata "sottrazione" e la classe così ottenuta viene chiamata "differenza" delle due. L'operazione che conduce, nella ipotesi ammessa, alla costruzione della classe (6) viene chiamata "divisione" della A per la B, e la classe ottenuta viene chiamata "rapporto" o anche (impropriamente) "quoziente" delle due.

Osservazione 1 - L'operazione indicata dalla (6) non è eseguibile se è $B = 0$. Abbiamo visto infatti che la classe 0c è costituita da tutti i razionali diversi dallo zero, e di conseguenza la classe che si ottiene eseguendo le operazioni di divisione indicate dalla definizione della (6) non è superiormente limitata.

Chiameremo NUMERI REALI ASSOLUTI le classi SL complete di numeri razionali assoluti, sulle quali converremo di operare con le operazioni sopra definite e tra le quali riterremo valide le relazioni pure definite.

I numeri razionali di una classe A verranno anche detti "valori per difetto" del numero reale corrispondente, e quelli della classe Ac verranno detti "valori per eccesso" del numero stesso.

Osservazione 2 - Abbiamo detto che le classi speciali sono in corrispondenza biunivoca con i numeri razionali che sono i loro massimi; si verifica che anche le operazioni definite corrispondono, in questo caso, alle operazioni già note tra i numeri razionali suddetti. Tuttavia abbiamo visto che esi_

stano delle classi non speciali. Pertanto potremo dire che i numeri razionali formano un sottoinsieme dei numeri reali. Si verifica poi immediatamente che esiste un omomorfismo tra l'insieme dei razionali e le classi speciali, perché le operazioni tra queste ultime, definite poco fa, corrispondono a quelle note tra i numeri razionali.

Osservazione 3 - Poiché una classe A SL completa di numeri razionali è costituita da infiniti elementi, è impossibile fare un elenco esauriente di essi. Occorre limitarsi quindi a stabilire dei criteri in base ai quali si può decidere che un dato numero razionale appartiene ad una certa classe che costituisce un numero reale. Se la classe è speciale basterebbe assegnare il suo massimo, perché in tal caso sappiamo che la classe è costituita da tutti i numeri razionali non superiori a questo; tuttavia spesso si sceglie di precisare la classe mediante certi numeri razionali di una forma speciale: per esempio, fissando come base di numerazione il 10, si sceglie di rappresentare un numero razionale mediante una successione infinita di valori per difetto costituiti da frazioni decimali. Così per esempio, dovendo rappresentare la classe speciale che ha come massimo il numero razionale $\frac{2}{3}$, si sceglie di rappresentarla mediante la successione infinita di frazioni decimali:

(8) $\frac{6}{10}, \frac{66}{100}, \frac{666}{1000}, \frac{6666}{10000} \dots$ e così via, frazioni che vengono scritte nella forma più abituale:

(9) $0.6, 0.66, 0.666, 0.6666, \dots$

Nel caso poi in cui la classe A non sia speciale, ai fini della pratica si suole assegnare una successione di valori per difetto (forniti anche in questo caso da frazioni decimali) scelti in modo tale che da ognuno di essi si possa costruire un valore per eccesso (cioè appartenente alla classe A) in modo ben determinato.

Così per esempio la classe non speciale di razionali che soddisfano alla relazione:

(10) $x^2 < 5$

viene rappresentata con una successione di frazioni decimali del tipo della seguente:

(11) 2, 2.2, 2.23, 2.236, 2.2360, 2.23606, ...

Come si verifica, ogni frazione decimale di questa successione, aumentata di una potenza di 0.1 corrispondente all'ordine dell'ultima cifra scritta dopo il punto decimale, fornisce un valore per eccesso del numero reale considerato, cioè un elemento della classe complementare di quella definita dalla (10). Così i numeri:

(12) 3, 2.3, 2.24, 2.237, 2.2361, 2.23607, ...

sono tutti valori per eccesso del numero razionale considerato.

Ovviamente questo modo di rappresentare una classe non è l'unico possibile: l'Aritmetica pratica, e le teorie del calcolo numerico, forniscono infatti varie procedure per costruire delle successioni di frazioni decimali atte a rappresentare i numeri reali che si prendono di volta in volta in considerazione. Le proprietà dei numeri reali assoluti che abbiamo stabilito, e le relazioni che abbiamo definito, permettono ora anche di definire in modo del tutto ovvio, il concetto di classe superiormente limitata di numeri reali. Sia A una classe cosiffatta; una facile riflessione permette di concludere che A determina in modo univoco un numero reale, cioè una classe superiormente limitata di numeri razionali; questa è costituita da tutti i numeri razionali che non sono superiori ad almeno uno degli elementi di una delle classi costituenti A .

Si potrebbe dire le stesse cose in modo diverso osservando che con la procedura della costruzione di classi superiormente limitate di numeri razionali, e con le definizioni delle relazioni e delle operazioni che abbiamo dato, l'insieme dei numeri razionali assoluti viene ampliato, dando luogo così all'insieme dei numeri reali assoluti. Ma la stessa procedura, applicata in quest'ultimo insieme non dà luogo al suo ampliamento.

VI - Numeri reali e grandezze continue.

La teoria che abbiamo sviluppato finora si presta bene per fornire un insieme di simboli e di operazioni che riproducano gli enti della Geometria elementare e le operazioni che noi eseguiamo su di essi.

Abbiamo già detto che, anche a livello elementare, la Matematica insegna ad associare un determinato numero ad ogni grandezza di una certa classe; il numero viene chiamato la misura della grandezza in parola. L'operazione viene eseguita partendo da certe convenzioni e con determinati procedimenti: le convenzioni si riducono in sostanza alla scelta di una determinata grandezza che appartiene alla classe, e che viene chiamata unità di misura; le operazioni consistono nella determinazione dei multipli della unità e nel loro confronto con la grandezza da misurare, oppure con i suoi sottomultipli. Precisamente, data una grandezza a della classe di grandezze omogenee, e fissata una grandezza u della classe stessa come unità di misura, indicando con m ed n due interi naturali, se è:

$$(1) \quad m * u = n * a$$

si suol dire che il numero razionale m/n è la misura della grandezza a nella unità u , oppure è il rapporto di a ad u .

Può avvenire tuttavia che non esista alcuna coppia di interi naturali tale che valga la (1); in tal caso le grandezze a ed u vengono dette "incommensurabili tra loro"; e la scoperta di coppie di segmenti tra loro incommensurabili (per esempio il lato di un quadrato e la sua diagonale) costituisce una scoperta fondamentale della civiltà scientifica dei Greci. In tal caso tuttavia è possibile costruire una classe di infiniti razionali p/q , tali che si abbia:

$$(2) \quad p * u < q * a .$$

Tale classe costituisce quindi un numero reale non speciale, nel senso che abbiamo dato a questa e_

spressione nelle pagine precedenti.

Pertanto questi enti che abbiamo costruito si prestano per rappresentare in ogni caso una grandezza mediante la operazione di misura, perché ad ogni grandezza si può far corrispondere in questo modo un numero reale.

La possibilità di istituire una corrispondenza inversa, cioè di far corrispondere ad ogni numero reale una grandezza, della quale il numero stesso è la misura, richiede che si enunci per ogni classe di grandezze un postulato di continuità, il quale potrebbe essere enunciato nei termini seguenti:

"Data una classe superiormente limitata di grandezze, esiste una unica grandezza che è estremo superiore della classe stessa".

Si verifica che questo postulato, nel caso particolare dei segmenti appartenenti ad una semiretta ed aventi una origine comune nella origine della semiretta stessa, ha la stessa portata del postulato di continuità di Dedekind.

Si può inoltre osservare che questo postulato non costituisce una affermazione (che potrebbe anche essere infondata e gratuita) della esistenza di certi elementi non costruibili direttamente con altri mezzi: esso infatti traduce la possibilità di dar un senso operativo concreto alla esistenza di procedure di misura che possono non aver termine, come avviene nel caso in cui si voglia misurare la diagonale di un quadrato assumendo come unità il lato del quadrato stesso.

N O T E

NOTA I - Diamo qui la dimostrazione della proposizione enunciata nella osservazione 1 del paragrafo 3 del Cap.V.

Da qui in avanti, salvo esplicito avviso contrario, con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, come

$a, b, c, \dots, n, m, \dots, x, y, z, \dots$

indicheremo dei numeri naturali:

LEMMA 1 - Dati due numeri a, b , se è:

(1) $a > b$ ed anche $b > 1$

allora è:

(2) $a/b < (a-1)/(b-1)$.

La verifica è immediata.

LEMMA 2 - Dati due interi p, q , se è:

(3) $p > q$ ed anche $(p/q)^2 < 5$

allora si ha:

(4) $p < 5q$.

LEMMA 3 - Nelle ipotesi del LEMMA 2, se è:

(5) $n > 2(5q-p)/(5q^2 - p^2)$,

allora si ha:

(6) $(p/q)^2 < [(np-1)/(nq-1)]^2 < 5$.

DIM. Dalla ipotesi 5 si ha:

(7) $(n^2)*(5q^2-p^2) > 2*n*(5q-p)$,

e quindi, a maggior ragione:

(8) $(n^2)*(5q^2-p^2)+5 > 2*(n*(5q-p)+1)$,

ossia:

(9) $5*(nq-1)^2 > (np-1)^2$.

Dal LEMMA 1 e da questa relazione segue la tesi del LEMMA 3.

TEOREMA. La classe dei numeri (razionali) che soddisfano alla relazione:

(10) $x^2 < 5$

non ha estremo superiore.

DIM. Anzitutto si ha:

A) non esiste alcun numero razionale che soddisfa alla relazione:

$$(11) \quad x^2 = 5.$$

La dimostrazione di questo fatto si consegue con ragionamenti analoghi a quelli (classici, attribuiti a Pitagora) con cui si dimostra che non esiste alcun numero razionale y tale che sia:

$$y^2 = 2.$$

B) Dai Lemmi dimostrati si ha che nessun razionale p/q può essere l'estremo superiore della classe definita dalla (10): infatti, dato un qualunque razionale (p/q) che soddisfa alla (10), il LEMMA 3 insegna a costruirne un altro che è maggiore del primo e che pure soddisfa alla (10).

NOTA II - Diamo qui la dimostrazione della proposizione enunciata nel paragrafo 5 del Capitolo V.

Con le convenzioni della NOTA I, siano p e q due numeri naturali, e si abbia:

$$(12) \quad p^2 > 5q^2$$

e quindi, ovviamente:

$$(13) \quad p > q.$$

LEMMA 4 - Nelle ipotesi poste, si ha:

$$(14) \quad p/q > (p+1)/(q+1).$$

La verifica è immediata.

Sia ora un intero n che soddisfi alla limitazione:

$$(15) \quad n > 2*(5q-p+2)/(p^2-5q^2),$$

e che sia maggiore di 1.

In questa ipotesi si verifica che è:

$$(16) \quad (np+1)^2 > 5*(nq+1)^2.$$

Tenendo presente la (14) si deduce quindi il

TEOREMA 2 - La classe dei numeri razionali z che soddisfano alla condizione:

$$(17) \quad z^2 > 5$$

non ha estremo inferiore.

Infatti non esiste alcun numero razionale che soddisfi alle due proprietà che abbiamo date come caratteristiche dell'estremo inferiore: dato infatti un numero p/q che soddisfi alla (12), abbiamo visto che se ne può costruire un altro, minore di quello, che pure soddisfi alla (12).